

## **Dynamical System Modeling of Dynastic Cycle with Optimal Control**

**Dhimas Mahardika<sup>1)</sup>, Rizki Chika Audita Ariyani<sup>2)</sup>, Uvi Dwian Kencono<sup>3)</sup>, Lucky Cahya Wanditra<sup>4)</sup>, dan Shafira Meiria Rahmasari<sup>5)</sup>**

<sup>1,2,3,4</sup>Sains Data, Universitas An Nasser

<sup>5</sup>Tadris Matematika, STAI Al Bahjah

<sup>1,2,3,4</sup>Kaliwadas, Kecamatan Sumber, Kabupaten Cirebon, 45611

<sup>5</sup>Jl Gudang Air No 179, Sendang, Kecamatan Sumber, Kabupaten Cirebon, 45611

E-mail: dhimas.mahardika@universitasannasher.ac.id<sup>1</sup>, chikaariyani@universitasannasher.ac.id<sup>2</sup>, uvidwiankencono@universitasannasher.ac.id<sup>3</sup>, luckycahya@universitasannasher.ac.id<sup>4</sup>, shafirameiria@staialbahjah.ac.id<sup>5</sup>

### **ABSTRACT**

*In ancient China there are three model of society which is farmers, bandits and ruler. When the authority (rulers) is not there, the dynamics system of farmers and bandits become predator-prey interactions system. In here rulers play role on taxing the farmers and catching the bandits and then punish them. Thus, farmers are a sort of renewable resource which is exploited both by bandits and by rulers. In this paper, optimal control is applied to reduce the bandit's population, by reducing it, the ruler population can also be reduced because the existing bandits can be conquered, so that the cost of running a government is more efficient because it can reduce the need for eradicating bandits from ruler. The type of the optimal control here is fixed time and free end point.*

**Keywords:** *Dynamical System, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle*

## **Pemodelan Sistem Dinamis dari Siklus Dinasti dengan Kontrol Optimal**

### **ABSTRAK**

Di Zaman Cina kuno, terdapat tiga model masyarakat, yaitu Petani, Bandit, dan Penguasa. Ketika otoritas (penguasa) tidak ada, sistem dinamika petani dan bandit menjadi sistem interaksi predator-mangsa. Di sini, penguasa berperan dalam memajaki petani dan menangkap bandit lalu menghukum mereka. Dengan demikian, petani merupakan sumber daya terbarukan yang dieksplorasi baik oleh bandit maupun penguasa. Dalam makalah ini, kontrol optimal diterapkan untuk mengurangi populasi bandit, dengan mengurangi populasi bandit, populasi penguasa juga dapat berkurang karena bandit yang ada dapat sudah ditaklukkan, sehingga biaya dalam menjalankan pemerintahan lebih efisien karena dapat mengurangi kebutuhan dalam pemberantasan bandit oleh penguasa. Jenis pengendalian control optimal di sini adalah waktu tetap dan titik akhir bebas.

**Kata Kunci:** Sistem Dinamik, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin

### **1. PENDAHULUAN**

Dalam sejarah peradaban Tiongkok kuno, struktur masyarakat pada masa dinasti-dinasti awal umumnya terbagi ke dalam tiga kelas sosial utama yang memainkan peran berbeda dalam keberlangsungan kehidupan politik dan ekonomi. Kelas pertama adalah para penguasa, yang bertanggung jawab memimpin wilayah, menjaga stabilitas, serta melindungi rakyat dari ancaman eksternal, termasuk gerombolan perampok (Wicaksono, 2023). Para penguasa juga memiliki kewenangan untuk memungut pajak dari para petani sebagai bentuk kontribusi terhadap pembiayaan pemerintahan dan pembangunan dinasti (Setiawan & Siddiq, 2025).

Kelas kedua adalah para bandit, yang sering kali menjadi ancaman terbesar bagi masyarakat pedesaan. Mereka melakukan tindak kekerasan seperti menyerang dan membunuh petani, serta merampas hasil panen dan uang yang dimiliki penduduk desa. Keberadaan bandit ini tidak hanya mengganggu ketenteraman, tetapi juga melemahkan stabilitas ekonomi karena menyebabkan terhambatnya distribusi pangan dan menurunnya produktivitas pertanian (Purba, 2025).

Kelas ketiga adalah para petani, yang memegang peranan penting dalam kehidupan dinasti karena mereka merupakan penghasil utama pasokan makanan. Tanpa hasil panen dari para petani, roda pemerintahan dan kelangsungan hidup masyarakat akan terganggu. Mereka bekerja keras mengolah tanah, menanam, hingga

memanen hasil pertanian yang kemudian menjadi fondasi ekonomi dinasti (Rahman, 2023). Dengan demikian, meskipun petani berada pada kelas sosial terbawah, peran mereka sangat vital dalam menopang keberhasilan dan ketahanan suatu dinasti. (Yulu, 2020). Sistem antara bandit dan penguasa yang saling bersaing untuk memperoleh keuntungan dari para petani menggambarkan dinamika sosial-politik yang menempatkan petani sebagai pihak yang paling rentan dalam struktur kekuasaan. Dalam konteks ini, petani diperlakukan bukan sebagai subjek yang memiliki hak dan kepentingan, melainkan sebagai sumber daya yang terus-menerus dapat dieksloitasi layaknya sumber daya terbarukan. Baik bandit maupun penguasa memanfaatkan hasil produksi petani untuk mempertahankan posisi dan kekuatan mereka, sehingga tercipta hubungan yang bersifat koersif dan tidak seimbang. Petani berada pada posisi sulit karena harus menghadapi tekanan ganda: di satu sisi, mereka harus memenuhi tuntutan penguasa formal; di sisi lain, mereka juga harus berhadapan dengan ancaman aktor-aktor informal seperti bandit yang turut mengekstraksi keuntungan dari hasil pertanian mereka. Sistem yang demikian mencerminkan ketidakadilan struktural, di mana kesejahteraan petani terabaikan dan pembangunan ekonomi lokal menjadi terhambat akibat praktik eksloitasi yang berlapis-lapis. (Ir Hj Euis Dasipah & Nataliningsih, 2024).

Dalam makalah penelitian ini mengusulkan model tiga kompartemen untuk mengeksplorasi masyarakat antara periode zaman cina kuno, variabel model keadaan mewakili jumlah penguasa, petani, dan bandit (Timur, 2020). Lebih lanjut dalam makalah ini kontrol optimal untuk diterapkan dalam model sistem dinamis (petani, bandit, penguasa), tujuan kontrol adalah untuk mengurangi populasi bandit sehingga populasi petani dapat tumbuh lebih besar sehingga penguasa dapat memperoleh lebih banyak pajak dari mereka dan dinasti dapat berkembang. Bentuk kontrolnya adalah banyaknya penjahat yang harus ditangkap dan dieksekusi, dengan mengeksekusi bandit sehingga petani dapat lebih nyaman dalam melakukan pekerjaan dan kehidupan sehari-hari mereka sehingga banyak lahan dapat diolah untuk memberikan lebih banyak pajak kepada para penguasa (Tifaransyah dkk., 2021).

Penggunaan aplikasi sistem dinamis dalam ekologi biologi telah menunjukkan perubahan yang signifikan dalam perkembangan ilmu matematika dan biosains selama beberapa tahun terakhir (Siregar, 2025). Sistem dinamis memungkinkan para peneliti untuk memahami proses ekologis secara lebih mendalam melalui pemodelan matematis yang menggambarkan interaksi antarorganisme, dinamika populasi, serta respons ekosistem terhadap perubahan lingkungan. Pendekatan ini tidak hanya memberikan gambaran kuantitatif mengenai perilaku suatu sistem biologis, tetapi juga mampu memprediksi pola jangka panjang yang sulit diamati secara langsung di lapangan (Ahmad dkk., 2025). Seiring meningkatnya kompleksitas permasalahan

lingkungan, sistem dinamis menjadi alat analisis yang semakin penting dalam mendukung pengambilan keputusan berbasis data, seperti manajemen konservasi, pengendalian penyakit, serta evaluasi dampak perubahan iklim terhadap keanekaragaman hayati. Dengan demikian, aplikasi sistem dinamis telah berkontribusi besar dalam memperluas pemahaman ilmiah di bidang ekologi modern sekaligus memperkuat integrasi antara disiplin matematika dan biologi. (Rosenberg, 2021). Sistem dinamis ini dirancang untuk bekerja secara adaptif dengan memanfaatkan pendekatan hukum kontrol optimal guna mencapai nilai terbaik dari suatu fungsi tujuan dalam rentang waktu tertentu (Fitriyani, 2025). Dalam konteks pengendalian sistem, proses optimasi dilakukan untuk menentukan bagaimana variabel kontrol harus diatur agar sistem dapat bergerak menuju kondisi yang diharapkan secara efisien, stabil, dan tetap berada dalam batasan operasional yang telah ditentukan. Pengaturan kontrol tidak hanya mempertimbangkan respons saat ini, tetapi juga memprediksi perubahan perilaku sistem di masa mendatang, sehingga keputusan kontrol yang dihasilkan mampu memberikan kinerja yang konsisten dan berkesinambungan.

Untuk memperoleh solusi kontrol yang paling optimal, penelitian ini menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin (Karunia, 2024). Prinsip ini merupakan salah satu metode fundamental dalam teori kontrol optimal yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara dinamika keadaan sistem, variabel kontrol, serta fungsi tujuan yang hendak dicapai. Melalui pendekatan ini, dapat dilakukan formulasi kondisi optimal yang melibatkan persamaan keadaan (*state equation*), persamaan kopel (*costate equation*), serta kondisi minimum dari Hamiltonian (Sofyan dkk., 2025). Penggunaan Prinsip Minimum Pontryagin memungkinkan peneliti memahami bagaimana perubahan kecil pada variabel kontrol akan mempengaruhi perilaku sistem secara keseluruhan, sehingga strategi pengendalian dapat disusun dengan lebih presisi dan rasional.

Dengan demikian, integrasi antara sistem dinamis dan metode kontrol optimal tidak hanya memberikan landasan matematis yang kuat, tetapi juga menghasilkan kerangka kerja yang dapat diterapkan pada berbagai permasalahan nyata yang membutuhkan efisiensi, stabilitas, dan kemampuan adaptasi jangka panjang.

Melalui prinsip ini, fungsi Hamilton dibangun untuk menggambarkan hubungan menyeluruh antara keadaan sistem, variabel kontrol, serta biaya yang harus diminimalkan dalam suatu proses pengendalian. Fungsi Hamilton berperan sebagai inti analitis yang menghubungkan dinamika sistem dengan tujuan optimalisasi, sehingga setiap perubahan pada variabel kontrol dapat ditelaah dampaknya terhadap perilaku sistem secara langsung. Selanjutnya, kondisi optimal diturunkan melalui tiga komponen utama, yaitu persamaan keadaan yang merepresentasikan evolusi sistem dari waktu ke waktu, persamaan adjoint yang

menggambarkan sensitivitas perubahan biaya terhadap keadaan sistem, dan kondisi minimalisasi Hamilton yang menentukan nilai kontrol terbaik pada setiap saat. Ketiga komponen tersebut bekerja secara simultan untuk menghasilkan lintasan optimal yang memenuhi kriteria efisiensi berdasarkan prinsip minimum.

Dengan demikian, Prinsip Minimum Pontryagin tidak hanya berfungsi sebagai alat untuk merumuskan strategi pengendalian yang paling efisien, tetapi juga menyediakan kerangka analitis yang kuat untuk memahami bagaimana dinamika sistem dipengaruhi oleh variasi kontrol. Pendekatan ini memungkinkan perancangan sistem kendali yang lebih terukur, sistematis, dan dapat dipertanggungjawabkan secara matematis, terutama pada aplikasi yang menuntut ketelitian dan efisiensi tinggi seperti sistem navigasi, optimasi energi, robotika, manajemen sumber daya, maupun rekayasa proses industri. Penerapan prinsip ini menjadikan proses pengendalian lebih adaptif dan terarah sehingga sistem dapat mencapai tujuan operasionalnya dengan penggunaan sumber daya yang minimal. (Ma & Zou, 2021) Jenis kontrol optimal dalam penelitian ini adalah waktu tetap dan titik akhir bebas yang artinya kita menentukan durasi kontrol dan menetapkan tujuan untuk mencapai atau mencapai titik keadaan akhir, kekuatan metode ini (waktu tetap dan titik akhir bebas) adalah bahwa kita dapat menentukan nilai titik akhir (Leondes, 2024).

## 2. RUANG LINGKUP

Pembahasan mengenai fenomena permasalahan dalam pemodelan sistem dinamis ini berfokus pada interaksi antar kelompok dalam suatu komunitas yang direpresentasikan melalui tiga kompartemen utama, yaitu petani, penguasa, dan bandit. Pemilihan tiga kompartemen tersebut bertujuan untuk menyederhanakan sistem agar lebih mudah dianalisis, sekaligus tetap mampu menggambarkan dinamika sosial yang kompleks dalam masyarakat. Setiap kompartemen memiliki peran, perilaku, dan pengaruh yang berbeda terhadap stabilitas sosial dan ekonomi komunitas. Petani digambarkan sebagai kelompok produktif yang menghasilkan sumber daya, penguasa bertindak sebagai pihak yang mengatur dan menjaga ketertiban, sedangkan bandit merepresentasikan ancaman atau faktor gangguan yang dapat memengaruhi keseimbangan sistem. Dengan pembagian kompartemen ini, model dapat mengilustrasikan bagaimana perubahan pada satu kelompok, seperti meningkatnya aktivitas bandit atau melemahnya otoritas penguasa, berpotensi memicu ketidakstabilan yang berdampak langsung pada kesejahteraan petani. Melalui pendekatan ini, pemodelan sistem dinamis dapat digunakan untuk memahami pola interaksi, memprediksi perkembangan situasi, serta membantu merumuskan strategi kebijakan yang lebih efektif dalam menjaga ketahanan dan harmoni dalam masyarakat. Penulis mengambil tiga kelompok komunitas tersebut karena sistem dinamis tersebut

mempunyai analogi dengan bentuk sistem dinamis Prey-Predator, sehingga analisis pemodelan ini dapat dilakukan dengan perhitungan menggunakan metode yang sudah ada sebelumnya menurut (Umashankar dkk., 2024);(Saha dkk., 2023).

Hasil atau output dari penelitian ini adalah tampilan grafik simulasi yang menggambarkan perubahan populasi Petani, Penguasa dan Bandit untuk kurun waktu tertentu, sehingga grafik tersebut juga dapat digunakan untuk memprediksi nilai suatu populasi selama selang waktu tertentu dengan memasukkan nilai data awal dari sebuah populasi (Jumlah awal sebuah populasi).

## 3. BAHAN DAN METODE

Pada bagian ini, kita akan membagi total populasi menjadi tiga kompartemen, yaitu populasi petani ( $F$ ), bandit ( $B$ ), dan penguasa ( $G$ ). Model matematikanya adalah:

$$\begin{aligned}\dot{F} &= rF\left(1 - \frac{F}{k}\right) - \frac{aFB}{b+F} - hFG \\ \dot{B} &= \rho \frac{aFB}{b+F} - mB - \frac{cBG}{d+B} \\ \dot{G} &= f \frac{aFB}{b+F} - gG\end{aligned}\quad (1)$$

model matematikanya dengan kontrol adalah:

$$\begin{aligned}\dot{F} &= rF\left(1 - \frac{F}{k}\right) - \frac{aFB}{b+F} - hFG \\ \dot{B} &= \rho \frac{aFB}{b+F} - mB - \frac{cBG}{d+B} - u \\ \dot{G} &= f \frac{aFB}{b+F} - gG\end{aligned}\quad (2)$$

dengan  $rF\left(1 - \frac{F}{k}\right)$  adalah laju pertumbuhan logistic

dari populasi petani,  $\frac{aFB}{b+F}$  adalah laju kematian petani karena serangan dari bandit,  $hFG$  laju kematian petani karena tidak kuat membayar pajak kepada penguasa,  $\rho \frac{aFB}{b+F}$  adalah laju pertambahan Bandit karena mendapatkan keuntungan dari Petani,  $mB$  adalah laju Bandit meninggalkan pekerjaannya,  $\frac{cBG}{d+B}$  adalah laju kematian bandit karena hukuman dari

Penguasa,  $f \frac{aFB}{b+F}$  adalah laju tingkat perekrutan proporsional dengan faktor  $f$  petani menjadi Penguasa,  $gG$  laju penguasa meninggalkan pekerjaannya. Dan  $uB$  adalah control optimal yang dimasukkan untuk mengurangi populasi Bandit

Model sistem dinamis pada (1) diambil dari (Fulford, 2024) dan dimodifikasi dengan memberikan

kontrol pada kompartemen bandit (B) seperti yang dapat kita lihat pada persamaan (2).

### 3.1 Analisa Kontrol Optimal

Untuk mengendalikan sistem, kami menerapkan metode kontrol optimal, yang tujuannya adalah meminimalkan bandit (B) dan nilai (biaya) kontrol yang direpresentasikan oleh  $u$ .

Didefinisikan fungsi costnya:

$$J(u) = \min \int_0^{t_f} B(t) + \frac{T}{2} u^2(t) dt \quad (3)$$

dengan nilai  $T$  adalah konstanta kontrol yang disubjekan terhadap persamaan (2)

dengan kondisi awal  $F(t) \geq 0$ ,  $B(t) \geq 0$ ,  $G(t) \geq 0$

Sekarang mencari fungsi kontrol  $u(t)$  sedemikian sehingga:

$$J(u) = \min \{u | u \in U\} \quad (4)$$

untuk subjek pada persamaan (2), dan kontrol setnya adalah:

$$U = \{u | u \in U \text{ is Lebesque measurable on } [0, t_f]\} \quad (5)$$

Dengan  $t_f$  adalah waktu akhir.

Perhatikan bahwa, untuk solusi kontrol optimal, harus ada kondisi awal non-negatif, solusi terbatas yang positif untuk persamaan (2), dan kontrol terukur Lebesque yang terbatas, sedangkan sehingga terdapat kontrol optimal yang meminimalkan  $J(u)$  jika kondisi berikut terpenuhi:

1.  $F$  bukan himpunan kosong
2. Kontrol set dari  $U$  harus tertutup dan konveks
3. Sisi kanan dari persamaan (2) bersifat kontinu, terbatas ke atas oleh kombinasi linier dari kontrol dan ruang keadaan, dan dapat dituliskan sebagai fungsi linier  $u$  dengan koefisien yang ditentukan oleh waktu dan keadaan.
4. Integrasi dari fungsi objektif konveks pada  $U$  dan terbatas kebawah oleh  $-A_2 + A_1(u)^\sigma$  dengan  $A_1 > 0$  dan  $\sigma > 0$

dengan  $F$  adalah kelas dari  $(F_0, B_0, G_0, u)$  sedemikian sehingga  $u$  adalah fungsi piecewise pada rentang  $[0, t_f]$  dengan nilai-nilainya berada dalam  $U$  (Khatun % Biswas, 2020)

### 3.2 Karakterisasi Kontrol Optimal

Untuk mencari nilai minimal Lagrangian, akan digunakan Prinsip Minimum Pontryagin (Mahardika & Kartika, 2024) yang kemudian kita definisikan sebagai fungsi Hamiltonian dari permasalahan kendali optimal sebagai berikut:

$$H = B(t) + \frac{T}{2} u^2(t) + \lambda_1 \dot{F} + \lambda_2 B + \lambda_3 \dot{G} \quad (6)$$

Dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  adalah variabel adjoint yang memenuhi persamaan sistem dibawah ini:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial F} = -\lambda_1 P_1 - \lambda_2 \rho \frac{abB}{(b+F)^2} - \lambda_3 f \frac{abB}{(b+F)^2} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial B} = -1 + \lambda_1 \frac{aF}{b+F} - \lambda_2 P_2 - \lambda_3 f \frac{aF}{b+F} \\ \frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial G} = \lambda_1 hF + \lambda_2 \frac{cB}{d+B} + \lambda_3 g \end{aligned} \quad (7)$$

Dengan:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left( r \frac{r-2F}{k} - \frac{abB}{(b+F)^2} - hG \right) \\ P_2 &= \left( \rho \frac{aF}{b+F} + \frac{cdG}{(d+B)^2} - m \right) \end{aligned} \quad (8)$$

dengan kondisi transversalitas (kondisi batas)

$$\lambda_1(t_f) = 0, \lambda_2(t_f) = 0, \lambda_3(t_f) = 0$$

Maka variabel kontrol optimal  $u^*$  dirumuskan sebagai:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Tu - \lambda_2 = 0, u = \frac{\lambda_2}{T} \quad (9)$$

dengan  $u = u^*$ .

## 4. PEMBAHASAN

Analisis numerik kendali optimal diformulasikan dan dijalankan menggunakan pemrograman MATLAB (Fortuna dkk., 2021);(Downey, 2021). Selanjutnya, kita akan membandingkan grafik sistem dinamis tanpa kendali optimal dan dengan menggunakan kendali optimal. Dalam kasus kendali optimal ini waktunya ditetapkan selama 100 tahun dan titik akhirnya adalah bebas (nilainya secara otomatis ditentukan lewat perhitungan numeriknya).

**Tabel 1. Data parameter dari persamaan sistem dinamik 1 dan 2**

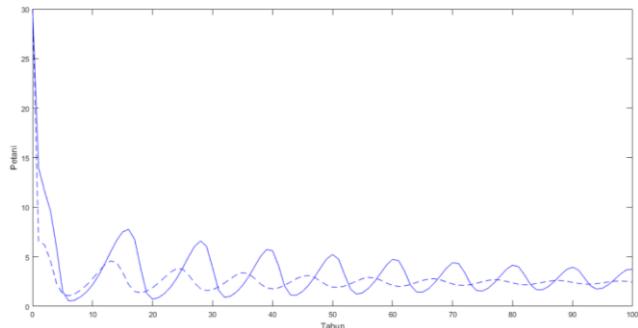
*Table 1. Parameter data of dynamic system model 1 and 2*

Parameter	Value	References
$a$	1	Fulford, 2024
$b$	2.17	Assume
$c$	0.4	Fulford, 2024
$d$	0.42	Fulford, 2024
$\rho$	5	Assume
$f$	8	Assume
$g$	2	Assume
$h$	0.1	Fulford, 2024
$m$	2.52	Assume
$r$	0.5	Assume
$k$	10	Assume
$F(0)$	30	Assume
$B(0)$	0.01	Assume
$G(0)$	0.2	Assume

Pada tabel 1 menunjukkan parameter-parameter yang digunakan untuk model sistem dinamis pada persamaan

(1) dan (2), dengan  $F(0)$ ,  $B(0)$ ,  $G(0)$  masing-masing merupakan nilai awal untuk petani, bandit dan penguasa.

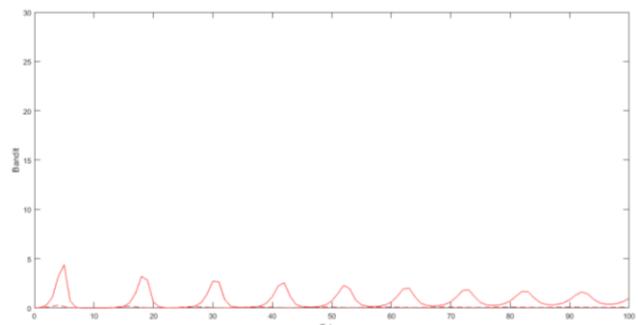
Berikut ditampilkan grafik-grafik dari variabel  $F, B, G$ , perbandingan grafik tanpa kontrol optimal dan dengan kontrol optimal, serta bidang fase tiga dimensi sistem dinamis.



**Gambar 1. Grafik perbandingan antara dinamika populasi Petani menggunakan kontrol optimal dan tanpa optimal kontrol**

*Figure 1. Comparison graph of dynamic of Farmer's population with and without optimal control*

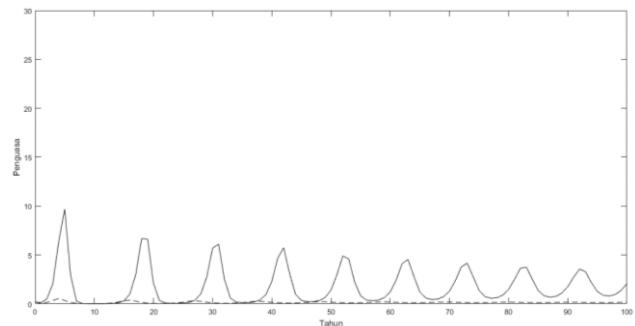
Seperti yang dapat kita lihat pada gambar 1, grafik populasi petani tanpa kontrol optimal (kurva biru solid) lebih besar daripada populasi dengan kontrol optimal (kurva biru putus-putus).



**Gambar 2. Grafik perbandingan antara dinamika populasi Bandit menggunakan kontrol optimal dan tanpa optimal kontrol**

*Figure 2. Comparison graph of dynamic of Bandit's population with and without optimal control*

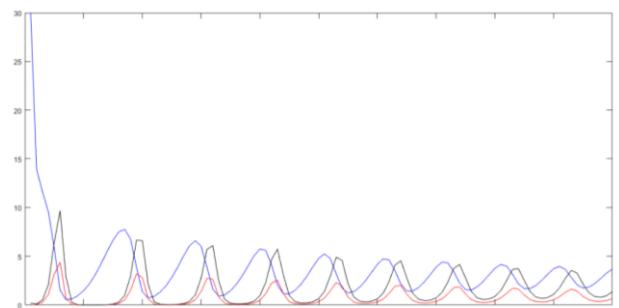
Seperti yang dapat kita lihat pada gambar 2, grafik populasi bandit tanpa kontrol optimal (kurva merah solid) relatif lebih banyak daripada populasi dengan kontrol optimal (kurva merah putus-putus). Artinya, penerapan kontrol optimal berhasil mengurangi populasi bandit.



**Gambar 3. Grafik perbandingan antara dinamika populasi penguasa menggunakan kontrol optimal dan tanpa optimal kontrol**

*Figure 3. Comparison graph of dynamic of Ruler's population with and without optimal control*

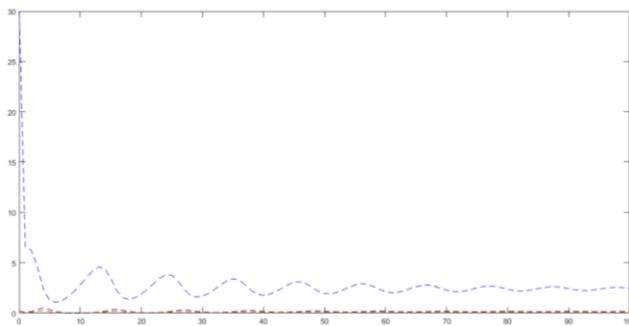
Seperti yang dapat kita lihat pada gambar 3, grafik populasi penguasa tanpa kendali optimal (kurva hitam solid) lebih banyak daripada populasi penguasa dengan kendali optimal (kurva hitam putus-putus). Artinya, dengan adanya kendali optimal ini pengusa menjadi lebih sedikit karena jumlah bandit yang harus ditaklukkan juga berkurang.



**Gambar 4: Grafik perbandingan antara dinamika populasi Petani, Bandit dan Penguasa tanpa kontrol optimal**

*Figure 4: Comparison graph of population dynamics system graphs between Farmers, Bandits and Rulers without optimal control*

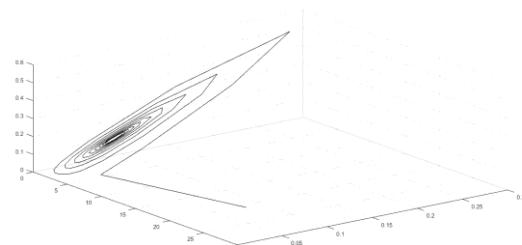
Pada gambar 4 dapat kita lihat grafik perbandingan populasi antara Petani, Penguasa dan Bandit tanpa kontrol optimal yang ditampilkan dalam satu diagram.



**Gambar 5: Grafik perbandingan antara dinamika populasi Petani, Bandit dan Penguasa menggunakan kontrol optimal**

*Figure 5: Graph Comparison of population dynamics system graphs between Farmers, Bandits and Rulers with optimal control*

Pada gambar 5 dapat kita lihat grafik perbandingan populasi antara Petani, Penguasa dan Bandit menggunakan kontrol optimal yang ditampilkan dalam satu diagram.



**Gambar 6: Grafik bidang fase 3D dinamika populasi Petani, Bandit dan Penguasa menggunakan kontrol optimal**

*Figure 6: 3D phase plane graph of population dynamics system of Farmers, Bandits and Rulers with optimal control*

Pada gambar 6 dapat kita lihat grafik bidang fase tiga dimensi dari sistem dinamik populasi antara Petani, Penguasa dan Bandit menggunakan kontrol optimal.

## 5. KESIMPULAN

Pemodelan sistem dinamis siklus dinasti bertujuan untuk menggambarkan hubungan antara persamaan diferensial dan fenomena nyata dalam dinamika populasi masyarakat. Melalui model ini, interaksi antara tiga kelompok petani, bandit, dan penguasa dapat disimulasikan untuk melihat bagaimana perubahan pada satu populasi memengaruhi populasi lainnya. Hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem persamaan diferensial mampu memprediksi perkembangan populasi tiap kelompok di masa mendatang. Penerapan fungsi kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin memberikan gambaran bahwa strategi pengendalian tertentu dapat menurunkan populasi bandit secara efektif. Penurunan jumlah bandit tersebut berdampak langsung pada berkurangnya kebutuhan

intervensi dari kelompok penguasa, sehingga populasi penguasa ikut menurun dalam simulasi. Dengan demikian, model ini membuktikan bahwa pendekatan sistem dinamis dapat digunakan untuk memahami dan memprediksi pola interaksi sosial yang bersifat kompetitif dan saling memengaruhi.

## 6. SARAN

Berdasarkan hasil analisis dan temuan penelitian, disarankan agar pemodelan sistem dinamis “Petani, Penguasa, dan Bandit” dikembangkan lebih lanjut dengan mempertimbangkan pendekatan yang lebih komprehensif. Karena model ini memiliki kemiripan dengan sistem dinamis predator prey yang telah banyak diteliti, penelitian lanjutan dapat memanfaatkan metode-metode analitis dan numerik yang sudah teruji untuk meningkatkan akurasi simulasi. Selain itu, untuk memperoleh gambaran yang lebih relevan dengan kondisi sosial masyarakat masa kini, model dapat diperluas dengan menambahkan variabel atau kompartemen baru misalnya faktor ekonomi, teknologi, kebijakan pemerintah, atau dinamika sosial lain yang memengaruhi stabilitas populasi. Pengembangan tersebut diharapkan dapat menghasilkan model yang lebih representatif, sehingga mampu memberikan prediksi dan rekomendasi yang lebih tepat bagi analisis dinamika sosial di dunia nyata.

## 7. REFERENSI

- Ahmad, N., Sutrisno, E., Sholikhah, F., & Rudiyanto, M. A. (2025). Strategi Efektif Dalam Penggunaan Model Biosistem: Menyusun Asumsi Dasar Untuk Keberlanjutan Lingkungan. *Journal Scientific of Mandalika (JSM)* e-ISSN 2745-5955| p-ISSN 2809-0543, 6(9), 3726–3738.
- Downey, A. (2021). Physical Modeling with MATLAB: A Hands-On Guide to Computation and Simulation. No Starch Press.
- Fitriyani, S. (2025). Matematika Dalam Kontrol Dan Sistem Teknik. *Matematika Dalam Fisika Dan Teknik*, 109.
- Fortuna, L., Frasca, M., & Buscarino, A. (2021). Optimal And Robust Control: Advanced Topics With MATLAB®. CRC press.
- Ir Hj Euis Dasipah, M. P., & Nataliningsih, I. H. (2024). Mengoptimalkan Hasil Pertanian: Teori Ekonomi dalam Produksi Pertanian. Mega Press Nusantara.
- Karunia, R. (2024). Penerapan Kontrol Optimal pada Penyebaran Penyakit Leptospirosis Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Leondes, C. T. (2024). Structural Dynamic Systems Computational Techniques and Optimization: Techniques in Buildings and Bridges. Taylor & Francis.
- Ma, Z., & Zou, S. (2021). Optimal Control Theory. Springer.

- Purba, S. S. B. R. (2025). Evaluasi Stabilitas Harga Komoditas Pertanian dalam Sistem Ekonomi Terbuka. *Circle Archive*, 1(7).
- Rahman, A. (2023). Politik Agraria. PT Salim Media Indonesia.
- Rosenberg, N. A. (2021). Population Models, Mathematical Epidemiology, And The COVID-19 Pandemic. *Theoretical Population Biology*, 137, 1.
- Saha, S., Sahoo, D., & Samanta, G. (2023). Dynamical Behaviour Of A Prey-Predator System In A Destructive Environment Incorporating Prey Refuge. *Filomat*, 37(22), 7505–7525.
- Setiawan, Y., & Siddiq, N. K. (2025). Dampak Pajak (Upeti) Majapahit (Wilwatikta) Terhadap Peningkatan Ekonomi Pada Zaman Otonomi. *Lex Prospicit*, 1(1), 43–57.
- Siregar, T. (2025). Matematika Sains Dan Teknologi (Saintek). Goresan Pena.
- Sofyan, A., Budiawan, M. A., Wunarlan, I., Muhlis, L. O., Syafar, A. M., Agus, S., Amalia, A. I., & Dwiyanto, A. R. (2025). *Matematika Teknik*. MEGA PRESS NUSANTARA.
- Tifaransyah, F., Safitri, A., Setyawan, P., Mustikasari, D. S., & Lejaringtyas, E. W. (2021). Kriminalitas di Jawa pada masa kolonial. *Candra Sangkala*, 3(2), 15–23.
- Timur, A. (2020). Ekonomi Politik.
- Umashankar, M. K. C., Mortuja, M. G., & Kumar, S. (2024). Dynamic analysis of an infected predator-prey system with prey herd behavior.
- Wicaksono, D. A. (2023). Sejarah Asia Timur: Sejarah Tiongkok, Jepang, dan Korea dari abad pertengahan hingga era modern. Anak Hebat Indonesia.
- Yulu, C. (2020). Reformasi Ekonomi Tiongkok & Kebangkitan Renminbi. Yayasan Pustaka Obor Indonesia.